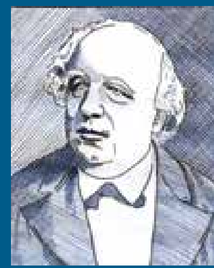
En 1854, un article paraît dans le *Journal de Crelle* sous le titre *Zur Theorie der Abel'schen Functionen*. Cet article révèle à la communauté scientifique les travaux d'un professeur de mathématiques du secondaire appelé à révolutionner l'analyse.



Karl Weierstrass
1815-1897

André Ross
Professseur retraité

Karl W

Il y a deux cent ans, le 31 octobre 1815, naissait le mathématicien allemand Karl Weierstrass à Ostenfelde, au nord de l'Allemagne. Son père, Wilhelm, est le secrétaire du maire d'Ostenfelde et il devient inspecteur des impôts alors que Karl est âgé de huit ans.

Ce travail l'oblige à déménager souvent et, chaque fois, Karl doit changer d'école. En 1829, Wilhelm devient assistant au bureau des impôts de Paderborn et Karl est inscrit au Theodorianum, le Gymnasium catholique de Paderborn, le plus ancien Gymnasium de la ville, fondé en 1612.

Élève très brillant, Karl occupe en même temps un travail de bibliothécaire pour aider à subvenir aux besoins de la famille. Durant son séjour au Gymnasium, il s'intéresse aux mathématiques. Cependant, son père souhaite qu'il fasse carrière dans la fonction publique et l'oblige à suivre des études de droit et d'économie.

Déchiré entre ses goûts et la volonté de son père, Weierstrass ne fréquente guère les salles de classe. Il fait la fête, pratique l'escrime et étudie les mathématiques. Il complète quatre années d'étude à l'Université de Bonn, mais ressort sans diplôme, ne se présentant même pas aux examens de fin d'étude.

Conseillé par un ami de la famille, son père consent à financer encore deux années d'étude à l'Académie théologique et philosophique de Munster, afin que Weierstrass puisse obtenir les titres nécessaires à l'enseignement secondaire. Dans cette institution, Weierstrass développe ses aptitudes et ses connaissances en mathématiques, en particulier sur les fonctions elliptiques, avec l'aide du professeur Christoph Guddermann (1798-1852) qui est l'un des premiers à donner des cours sur ces fonctions.

En 1842, Karl Weierstrass entreprend une carrière comme professeur au niveau secondaire. Il poursuit ses recherches sur les fonctions elliptiques et publie quelques articles dans le journal de son école. Ces articles sont incompris par ses collègues du secondaire et ne sont pas connus des mathématiciens universitaires avec qui Weierstrass n'a aucun contact.

En 1854, Weierstrass publie enfin un article dans une revue qui rejoint la communauté scientifique, le prestigieux *Journal de Crelle*[1]. Son article *Zur Theorie der Abel'schen Functionen* (La théorie des fonctions abéliennes)

1. *August Leopold Crelle (1780-1855) est un mathématicien et ingénieur en architecture allemand. Il fonda en 1826 le* Journal de Crelle, *dont l'objectif était de mettre en relation les différents mathématiciens entre eux, aussi bien en Allemagne qu'à l'étranger.*

est un résumé de l'essentiel de ses découvertes des quinze années précédentes. Cette publication lui vaut la reconnaissance immédiate de la communauté scientifique et l'Université de Königsberg lui décerne un doctorat honoris causa.

Parmi ses étudiants se trouve une femme, Sofia Kovaleskaya, à qui Weierstrass donne des cours privés car, en tant que femme, elle n'a pas le droit de s'inscrire à l'Université. Grâce à son appui, elle obtient le titre de docteur de l'Université de Göttingen et un poste de professeur à Stockholm.

Intégrale elliptique

Les intégrales elliptiques sont ainsi appelées car elles sont apparues dans les démarches pour déterminer la longueur d'un arc d'ellipse.

En 1856, il publie une version complète de sa théorie de l'inversion d'une intégrale hyperelliptique, c'est-à-dire d'une intégrale dont la différentielle contient, sous un radical du second degré, un polynôme de degré supérieur à quatre. Plusieurs universités songent alors à la possibilité de lui offrir une chaire de mathématiques. Weierstrass qui n'a nullement l'intention de retourner enseigner au secondaire et rêve d'un poste à l'Université de Berlin, accepte, en juin 1856, la première offre formelle, celle de l'Institut technique de cette ville. Lors d'une conférence à Vienne en septembre, il se voit offrir un poste dans l'université autrichienne de son choix, mais pendant qu'il réfléchit à cette offre, son rêve se réalise. En octobre, l'université de Berlin lui offre un poste de professeur qu'il accepte aussitôt.

À l'université de Berlin, Weierstrass rejoint les professeurs Ernst Kummer (1810-1893) et Leopold Kronecker (1823-1891) et contribue à en faire l'université la plus prestigieuse du monde dans le domaine des mathématiques. Les meilleurs étudiants européens y convergent pour assister aux cours de Weierstrass. Ses cours comportent les applications de l'intégrale et des séries de Fourier en physique mathématique, une introduction à la théorie analytique des fonctions, la théorie des intégrales elliptiques et des applications en géométrie et en physique.

Weierstrass a une fin de vie assez pénible. Depuis 1850, il souffre de graves problèmes de santé, des étourdissements et des vertiges. En 1861, il est victime d'une attaque qui l'éloigne de ses cours pendant un an. De retour en classe, il doit se contenter de dicter ses cours assis, en laissant le soin à un étudiant d'écrire au tableau.

Deux autres événements vont gravement perturber ses dernières années. En 1877, il se brouille avec son collègue et ami Kronecker au sujet des découvertes de Georg Cantor (1845-1918) à propos des ensembles et de leur cardinalité. Puis son ancienne étudiante et correspondante, Sofia Kovaleskaya, décède en 1891. Très affecté par ce décès, Weierstrass brûle même toutes les lettres de Sofia. Il passe ses trois dernières années dans un fauteuil roulant, et décède le 19 février 1897 à Berlin.

Weierstrass se signale par sa volonté d'utiliser l'algèbre pour définir les concepts de l'analyse. Les principes de la théorie des fonctions doivent reposer selon lui sur des principes algébriques clairs. Il donne les premières définitions rigoureuses des nombres réels, de la limite, de la continuité et de la dérivabilité (voir encadré page suivante).

Définition de la continuité

Bernhard Bolzano (1781-1848) avait développé une définition assez rigoureuse des limites vers 1817, mais ses travaux restèrent quasi inconnus de la communauté mathématique pendant plusieurs années. D'autres mathématiciens éminents, comme Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), n'avaient que de vagues définitions de la limite et de la continuité.

Arithmétisation de l'analyse

Les travaux de Weierstrass sont à l'origine d'une démarche qui est appelée arithmétisation de l'analyse. Avant Weierstrass, Cauchy était la référence pour les définitions de limite, continuité et dérivée. Ainsi, la définition de limite par Cauchy est :

Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur finie, de manière à en différer aussi peu qu'on voudra, cette dernière est appelée limite de toutes les autres.

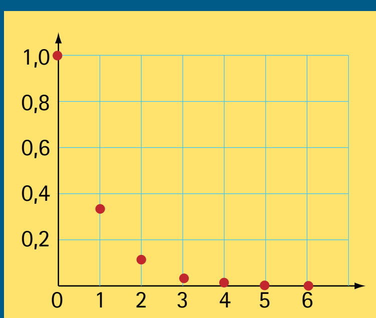
Considérons, par exemple, la suite :

$$\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots, \frac{1}{3^n} \ldots\right\}, \text{ où } n \in \mathbb{N}.$$

Chacun des termes est l'image d'un nombre naturel par la fonction

$$f(n) = \frac{1}{3^n}.$$

dont la représentation graphique est



Cette représentation graphique illustre bien la définition que Cauchy donne de la limite d'une suite. Elle permet aussi de comprendre que sa définition est fondée sur une intuition géométrique. Or, l'avènement des géométries non euclidiennes a forcé la remise en question des *convictions géométriques*. Ce qui semblait géométriquement évident était devenu suspect. Pour établir de façon rigoureuse les fondements du calcul infinitésimal, il ne fallait plus avoir recours à la géométrie. Les mathématiciens se sont alors tournés vers l'arithmétique et l'algèbre. Peut-on par l'arithmétique et l'algèbre doter le calcul infinitésimal de fondements solides ?

C'est dans cette optique que s'inscrivent les travaux de Weierstrass qui réussit à définir la notion de limite d'une suite sans avoir recours à des notions vagues comme « indéfiniment » ou « quantités infiniment petites ».

Il donne de la limite la définition :

On dit qu'une suite (u_n) de nombres réels admet pour limite le réel L si, pour tout réel strictement positif, aussi petit que l'on veut, il est possible de déterminer un entier naturel n_0, tel qu'au-delà du rang n_0, tous les termes de la suite u sont éloignés de L d'une distance inférieure ou égale à ε.

Sous forme symbolique, la définition de limite d'une suite de Weierstrass s'écrit :

$$L \text{ est la limite d'une suite } \{x_n\} \text{ si}$$
$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ n_0 > 0$$
$$\text{tel que } \forall n \geq n_0, |x_n - L| < \varepsilon.$$

Pour pouvoir affirmer que la limite de la suite de notre exemple est 0, il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n_0} - 0 < \varepsilon.$$

En résolvant pour n_0, on obtient :

$$3^{n_0} > \frac{1}{\varepsilon} \text{ et } n_0 > \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln 3} = \frac{-\ln\varepsilon}{\ln 3}.$$

Quelque soit ε, il suffit de prendre un entier n_0 plus grand que $-\ln\varepsilon/\ln 3$ pour que tous les termes de la suite u soient éloignés de 0 d'une distance inférieure ou égale à ε.

Cela permet de conclure que 0 est la limite de la suite

$$\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots, \frac{1}{3^n} \ldots\right\}, \text{ où } n \in \mathbb{N}.$$

On remarque que la démonstration consiste à exhiber une valeur pour n_0 satisfaisant à la condition, ce qui nécessite quelques manipulations algébriques.

Continuité d'une fonction

La définition donnée par Cauchy de la continuité est :

Une fonction f(x), partout définie entre deux valeurs limites de x, reste continue entre ces limites si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la valeur de la fonction.

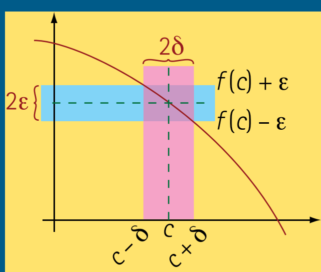
Weierstrass définit de façon algébrique la continuité d'une fonction en un point :

$$\text{Une fonction } f \text{ est continue à } x = c \text{ si}$$
$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0,$$
$$\text{si } |x - c| < \delta, \text{ alors } |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

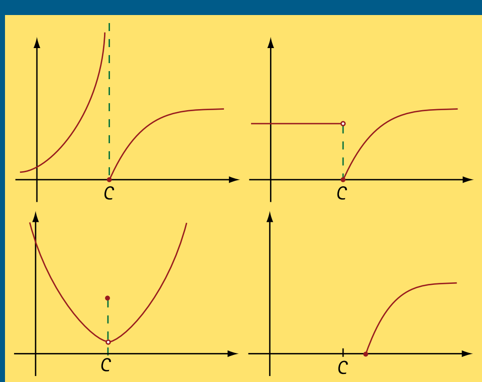
On a alors $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Cette définition signifie que la fonction est continue si pour un ε quelconque, il existe un voisinage de c, soit $]c - \delta; c + \delta[$, tel que pour toutes les valeurs de x dans ce voisinage, on a

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$



On constate facilement que cela disqualifie les fonctions dont le graphique est donné ci-dessous. Elles ne sont manifestement pas continues en $x = c$.



Cependant, pour démontrer formellement qu'une fonction est continue à $x = c$, il faut exhiber un δ satisfaisant à la condition, ce qui nécessite des manipulations algébriques dont la complexité dépend de la règle de correspondance définissant la fonction.

Dérivabilité d'une fonction

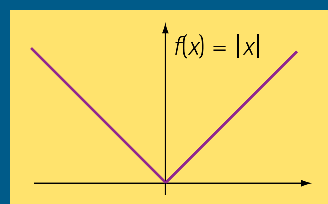
Weierstrass définit la dérivabilité d'une fonction f en un point d'abscisse c de la façon suivante :

Soit f une fonction définie sur un intervalle]a; b[et c ∈]a; b[. On dit que la fonction est dérivable en c si la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

existe et est finie. La limite, notée f'(c), est appelée dérivée de la fonction f en c.

Certaines fonctions peuvent être continues partout et ne pas être dérivable en un point. C'est le cas de la fonction $f(x) = |x|$.

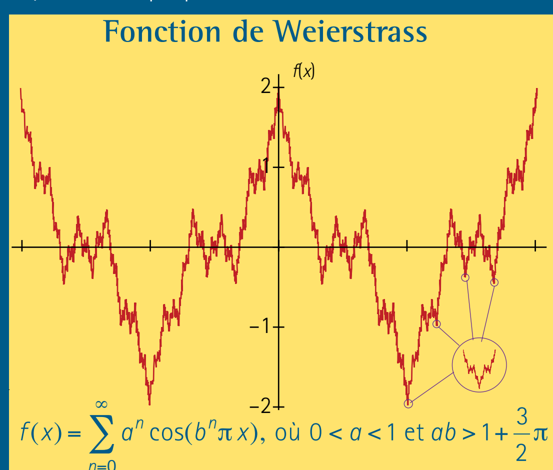


En effet, celle-ci n'est pas dérivable à $x = 0$ puisque

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

donne –1 si $h < 0$ et 1 si $h > 0$. La limite n'est donc pas définie et la fonction n'est pas dérivable.

Weierstrass a présenté une fonction continue partout et dérivable nulle part, ce qui a choqué l'intuition des analystes de l'époque[2].



Cette fonction présente une complexité uniforme indépendante du facteur d'échelle avec lequel on la considère. Ce qui est une caractéristique des fractals.

2. *Charles Hermite (1822-1901) déclare : « Je me détourne avec effroi et horreur, de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont pas de dérivée. »*